G.E.I.P.I.

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

ESSTIN - EEIGM - ESINSA - EIVL - ENSGSI - ISAT

VILLE D'EXAMEN : .....

(TELLE QU'ELLE FIGURE DANS UN CADRE SUR VOTRE CONVOCATION)

Remplissez très lisiblement la ville d'examen à gauche et le talon ci-dessous

NOM :

Prénoms :

Numéro d'inscription :

Lorsque vous inscrivez votre nom, mettre cette page à plat.

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 24 Mai 2000
(9 h à 12 h)

Ne rien inscrire ci-dessous

1	
2	
3	
4	
5	

Les réponses seront données directement sur les feuilles de sujets, dans les cases prévues à cet effet. **Les notations de l'énoncé devront impérativement être respectées.**

Les démonstrations ne sont pas demandées, sauf dans quelques questions où le contraire est explicitement mentionné. Chaque fois que cela est possible, on donnera le **résultat exact** du calcul et non **pas un résultat approché.**

Les exercices proposés sont indépendants. Un barème de notation approximatif est donné pour chacun d'eux, l'ensemble de l'épreuve étant noté sur 60 points.

L'usage des calculatrices électroniques, à alimentation autonome, non imprimantes, est autorisé. Leurs annexes éventuelles (notices d'emploi, cartes magnétiques, modules enfichables, etc.) sont interdites.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Les réponses écrites au crayon ne seront pas acceptées.

IL EST INTERDIT AUX CANDIDATS DE SIGNER LEUR COPIE OU D'Y METTRE UN SIGNE QUELCONQUE REVELANT LEUR IDENTITE.

TOTAL

Groupement d'Écoles d'Ingénieurs à Préparation Intégrée

Le sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9

N.B. Il est rappelé que, sauf dans les questions où le contraire est explicitement mentionné, les démonstrations ou détails de calcul ne sont pas demandés. Seuls sont acceptés les résultats exacts des calculs.

EXERCICE I (15 points)

Donner les réponses aux questions de la Partie A dans les cadres prévus ci-dessous.

Partie A

On considère l'application g de $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ell n\left(x^2+1\right)$ où ℓn désigne la fonction logarithme népérien.

1 - a - Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b - Calculer la dérivée de g et donner le tableau de variations de g.

2 - a - Montrer que, sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b - Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près et justifier la réponse.

3 - Préciser le signe de g sur $\mathbb{R}^+$.

REPONSES A L'EXERCICE I - Partie A

A - 1 - a et **A - 1 - b** :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

$g'(x) =$

x	
$g'(x)$	
$g(x)$	

A - 2 - a - Existence et unicité de α :

A - 2 - b :

A - 3 - Signe de g :

EXERCICE I (suite)

Donner les réponses aux questions des parties B et C dans les cadres prévus à la page 3.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ell n\left(x^2+1\right)}{x} \quad \text{si } x > 0 , \quad f(0) = 0$$

et soit (**C**) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

1 - a - Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

Déterminer une équation de la tangente T_0 à (**C**) au point d'abscisse **0** .

b - Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2 - a - Calculer $f'(x)$ et donner une relation liant $f'(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$.

b - Soit α le réel défini à la question (**A - 2 - a**).

Etablir que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

c - Donner le tableau de variations de f et tracer la courbe (**C**).

Partie C

On considère la fonction **F** définie sur $[1 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.

1 - Montrer que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $\ell n\left(x^2\right) < \ell n\left(x^2+1\right)$.

En déduire le réel **A** tel que , pour $x > 1$, $A \dfrac{\ell n\, x}{x} < \dfrac{\ell n\left(x^2+1\right)}{x}$.

2 - Calculer, pour $x \geq 1$, l'intégrale $I(x) = \int_1^x \dfrac{\ell n\, t}{t}\, dt$.

(On explicitera le calcul et on trouvera $I(x)$ de la forme $I(x) = B\left(\ell n\, x\right)^k$.)

3 - a - A l'aide des questions (**C-1**) et (**C-2**), déterminer une fonction φ telle que, pour tout $x \geq 1$, $\varphi(x) \leq F(x)$.

b - En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Justifier la réponse.

4 - Déterminer la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$ et donner le tableau de variations de la fonction **F** .

REPONSES A L'EXERCICE I - Parties B et C

B - 1 - a - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} =$ Equation de T_0 :

B - 1 - b - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

B - 2 - a :

$f'(x) =$

$f'(x) = u(x)\, g(x)$ avec $u(x) =$

B - 2 - b :

B - 2 - c :

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	



C - 1 : $\ell n\left(x^2\right) < \ell n\left(x^2+1\right)$ car

A =

C - 2 - Calcul de I(x) :

C - 3 - a :

$\varphi(x) =$

C - 3 - b : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) =$

car

C - 4 :

$F'(x) =$

x	
$F'(x)$	
$F(x)$	

EXERCICE II (10 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus à la page 5.

On considère le tétraèdre **ABCD** ci-contre ; on note **I** le milieu de **[AB]** et **J** le milieu de **[CD]**.

1 - a - Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1);(B,1);(C,-1);(D,1)\}$.

Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.

b - Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1);(B,1);(D,2)\}$.

Exprimer $\overrightarrow{IG_2}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$.

En déduire la position de G_2 par rapport aux points **I** et **D** .

c - Exprimer $\overrightarrow{JG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CI}$.

En déduire $\overrightarrow{G_2G_1}$ en fonction de $\overrightarrow{G_2J}$.

Préciser la position de G_2 par rapport aux points G_1 et **J** .

d - Compléter la figure ci-contre en y plaçant les points **I** , **J** , G_1 , G_2 .

2 - Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1);(B,1);(C,m-2);(D,m)\}$, quand il existe.

a - Préciser l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.

Dans les questions qui suivent, on suppose que m appartient à $\mathcal{E}$.

b - Déterminer, en fonction de m , les réels a et b tels que $m\overrightarrow{IG_m} = a\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{ID}$.

(On donnera le détail du calcul.)

En déduire que G_m appartient à un plan fixe $\mathcal{P}$. (On donnera trois points définissant ce plan.)

c - Vérifier que $m\overrightarrow{JG_m}$ est égal à un vecteur constant, que l'on précisera.

d - En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m du plan $\mathcal{P}$ lorsque m décrit $\mathcal{E}$.

EXERCICE III (10 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus aux pages 5 et 7.

Une urne **U** contient quatre boules noires et deux boules blanches.

1 - On tire simultanément deux boules dans l'urne.

a - Quelle est la probabilité p_{nn} d'obtenir deux boules noires ?

b - Quelle est la probabilité p_{bb} d'obtenir deux boules blanches ?

c - Quelle est la probabilité p_{bn} d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?

La suite de l'exercice III est en page 6

REPONSES A L'EXERCICE II

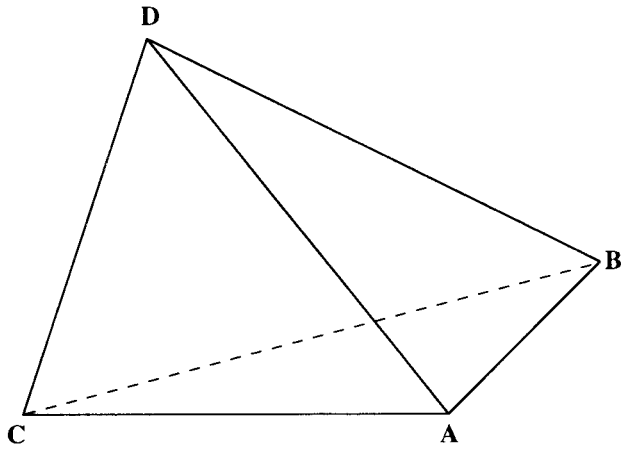
1 - a :

$\overrightarrow{IG_1}$ =

1 - b :

$\overrightarrow{IG_2}$ =

Position de G_2 :



1 - c :

$\overrightarrow{JG_1}$ =

Position de G_2 :

$\overrightarrow{G_2G_1}$ =

2 - a :

$\mathcal{E}$ =

2 - b : $(a\ ;\ b)$ =

Détail du calcul de a et b :

$\mathcal{P}$ est le plan

2 - c :

$m\ \overrightarrow{JG_m}$ =

2 - d :

Ensemble $\mathcal{F}$:

REPONSES A L'EXERCICE III (question 1)

1 - a :	1 - b :	1 - c :
p_{nn} =	p_{bb} =	p_{bn} =

EXERCICE III (suite)

Donner les réponses à cette partie 2 dans les cadres prévus à la page 7

2 - Un jeu se déroule selon la règle suivante : le joueur tire simultanément deux boules dans l'urne **U** qui contient quatre boules noires et deux boules blanches ;

. si les deux boules sont noires le joueur **gagne a francs** ($a \geq 0$) et le jeu s'arrête ;

. si les deux boules sont blanches, le joueur **perd $6a$ francs** et le jeu s'arrête ;

. si les deux boules sont de couleurs différentes alors *il ne remet pas* les boules dans l'urne et tire une seconde fois simultanément deux boules de l'urne :

- si les deux boules tirées sont noires, il **gagne b francs** (on suppose $b \geq 0$, $b \neq a$) et le jeu s'arrête,
- sinon, il **perd 3 francs** et le jeu s'arrête.

On désigne par **G** la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (**positifs ou négatifs**) du joueur.

a - Faire un arbre correspondant à tous les gains possibles.

b - Quelle est la probabilité **Q** de tirer deux boules noires au second tirage, sachant que l'on a tiré deux boules de couleurs différentes au premier tirage ?

c - Quelle est la probabilité $p(G = b)$ de gagner b francs ?

d - Faire un tableau définissant la loi de probabilité de la variable aléatoire **G** .

e - Exprimer en fonction de b l'espérance mathématique **E(G)** de la variable aléatoire **G** .
Pour quelle valeur de b le jeu est-il équitable, c'est-à-dire **E(G) = 0** ?

f - Pour la valeur de b ainsi trouvée calculer, en fonction de a , l'écart-type $\sigma_G(a)$ de la variable **G** .

EXERCICE IV (9 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus à la page 7.

Le but de l'exercice est le calcul de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta)\left[\ln(\cos\theta)\right] d\theta$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1 - On considère l'application f de $]-1\,;+1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(u) = \dfrac{u^2}{1-u^2}$.

Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $u \in]-1\,;+1[$, $f(u) = a + \dfrac{b}{1-u} + \dfrac{c}{1+u}$.

2 - On pose, pour $x \in]-1\,;+1[$, $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$.

a - Calculer $F(x)$.

b - Exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

3 - On pose, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\right[$, $g(\theta) = F(\sin\theta)$.

Calculer $g'(\theta)$.
(On donnera le détail du calcul de $g'(\theta)$ et on constatera que $g'(\theta) = A\,\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$, où **A** est un entier positif.)

4 - En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$.

5 - A l'aide d'une intégration par parties et de la valeur de **I** , calculer l'intégrale **K** .

(On posera $u(\theta) = \ln(\cos\theta)$, $v'(\theta) = \cos\theta$ et on donnera le détail du calcul).

REPONSES A L'EXERCICE III (suite)

2 - a - Arbre des gains :

2 - b : $Q =$

2 - c : $p(G = b) =$

2 - e : $E(G) =$

Le jeu est équitable pour

2 - d :

$G = x$	
$p(G = x)$	

2 - f : $\sigma_G(a) =$

REPONSES A L'EXERCICE IV

1 : $(a \ ; b \ ; c \ ) =$

2 - a : $F(x) =$

2 - b : $F'(x) =$

3 - Calcul de $g'(\theta)$:

$A =$

4 : $I =$

5 - Calcul de **K** :

EXERCICE V (16 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus à la page 9.

Le plan complexe **P** étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$,

on appelle : **A** le point d'affixe **1** ,

$\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} - \{1\}$,

P_1 le plan **P** privé du point **A** ,

P_+ le demi-plan formé par les points de P_1 ayant une ordonnée positive ou nulle,

P_- l'ensemble des points de P_1 dont l'ordonnée est négative ou nulle.

Soit f l'application de $\mathbb{C}_1$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$

et soit **T** l'application de P_1 dans **P** qui, au point m d'affixe z , associe le point **M** d'affixe $Z = f(z)$.

1 - a - On pose $Z_0 = f\left(4 + i\sqrt{3}\right)$.

Donner l'expression algébrique et la forme exponentielle de Z_0 .

b - Déterminer les complexes z_1 et z_2 vérifiant l'équation $f(z) = -z$.

Donner les formes algébriques et exponentielles de z_1 et z_2.

2 - On considère les points $m(z)$ et $M(Z)$ où $Z = f(z)$.

a - Exprimer $|Z|$ et $arg\ Z$ en fonction de $|z-1|$ et $arg(z-1)$.

b - On suppose que le point m appartient au cercle **(C)** de centre **A** et de rayon **R** .

Déterminer $|Z|$.

En déduire que **M** appartient à un cercle **(C')** dont on précisera le centre et le rayon.

c - Soit (C_1) le demi-cercle intersection de **(C)** et du demi-plan P_- et $m(z)$ un point de (C_1).

Que peut-on dire de $arg(z-1)$?

En déduire une courbe (C_1') à laquelle appartient le point **M** , où $M = T(m)$.

3 - On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$, où x , y , X , Y sont des réels et $Z = f(z)$.

a - Exprimer **X** et **Y** en fonction de x et y .

b - Quel est l'ensemble **E** des valeurs de z pour lesquelles $f(z)$ est réel ?

c - Quel est l'ensemble **F** des points m tels que $T(m)$ appartienne à la droite $(O ; \vec{v})$?

4 - On considère la droite **(D)** d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Soit m le point de la droite **(D)** ayant pour ordonnée y .

a - Quelle est l'affixe z de m ?

b - Soit $Z = f(z)$. Exprimer **Z** en fonction de y .

c - Soit **M** le point d'affixe **Z** et **B** le point d'affixe -1 . Calculer **BM** .

En déduire que le point **M** appartient à un cercle **(G)** dont on donnera une équation cartésienne.

5 - On considère, pour $x \in [-1 ; +1[$, la courbe (γ) d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$.

a - Quelle est la nature géométrique de (γ) ?

b - Soit φ l'application de $[-1 ; +1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Calculer $\varphi'(x)$.

Donner le tableau de variations de la fonction φ .

Quelle est l'image par φ de l'intervalle $[-1 ; +1[$?

c - On considère le point m de (γ) d'affixe $z = x + i\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1 ; +1[$.

Soit $M = T(m)$, **M** d'affixe $Z = X + iY$.

α) Calculer **X** .

En déduire que le point **M** appartient à une courbe (Δ) que l'on précisera.

β) Exprimer **Y** en fonction de $\varphi(x)$?

En déduire $T(\gamma)$, image par **T** de la courbe (γ) .

REPONSES A L'EXERCICE V

1 - a - Expression algébrique : Forme exponentielle :

$Z_0 =$ $Z_0 =$

1 - b - Expressions algébriques : Formes exponentielles :

$z_1 =$ $z_1 =$

$z_2 =$ $z_2 =$

2 - a :

$|Z| =$ $arg\ Z =$

2 - b :

$|Z| =$ (C') est le cercle

2 - c :

$arg(z - 1)$ Courbe (C_1') :

3 - a :

$X =$ $Y =$

3 - b :

E

3 - c :

F

4 - a :

$z =$

4 - b :

$Z =$

4 - c :

BM = Equation de (G) :

5 - a - Nature géométrique de (γ) :

5 - b :

$\varphi'(x) =$

$\varphi\left([-1 ; +1[\right) =$

x	
$\varphi'(x)$	
$\varphi(x)$	

5 - c - α :

$X =$ Courbe (Δ) :

5 - c - β :

$Y =$ $T(\gamma)$: